Задачи к зачету[†].

1. a) Используя операторный метод, проквантовать теорию двух действительных скалярных полей с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + C\partial_\mu\varphi\partial_\mu\chi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \mu^2\varphi\chi - \frac{M^2}{2}\chi^2.$$

При каких значениях параметров m, μ, M и C такая теория имеет смысл?
b) Показать, что из полученных в п. а) коммутационных соотношений следуют канонические (одновременные) коммутационные соотношения.
c) Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы обнаружили систему в одночастичном чистом состоянии, описываемом полем φ. Какова вероятность обнаружить систему в момент времени t в состоянии, описываемом полем χ?

2. Рассмотрим теорию двух спинорных полей e и μ (прототипы электронного и мюонного нейтрино) с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{e}\hat{\partial}e + i\bar{\mu}\hat{\partial}\mu - (\bar{e}_R, \bar{\mu}_R)\begin{pmatrix} m_e & A \\ B & m_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \end{pmatrix} + \text{эрм. сопр.},$$

где m_e, m_μ, A, B – комплексные параметры, а индексы L и R означают левые и правые спиноры соответственно.

a) Проквантовать теорию. Найти коммутационные соотношения в координатном пространстве.

b) Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы имеем чистое одночастичное состояние, рождённое полем e_L (такое состояние может появиться, например, в результате распада π^+ на позитрон и электронное нейтрино). Найти вероятность обнаружить систему в момент времени t в состояниях, описываемых полями e_L, e_R, μ_L, μ_R, $\bar{e}_L$, $\bar{e}_R$, $\bar{\mu}_L$, $\bar{\mu}_R$.

3. Рассмотрим теорию электромагнитного поля A_μ и действительного скалярного поля ϕ, описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + g\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\lambda}\phi.$$

Будем изучать данную систему в режиме, когда $F^{\mu\nu} = F_0^{\mu\nu} + F_1^{\mu\nu}$, где $F_0^{\mu\nu}$ соответствует большому постоянному однородному внешнему магнитному полю $\mathbf{B}$ — это в частности означает, что нелинейными по динамическим полям слагаемыми можно пренебречь.

1. Каковы свойства полей относительно CPT-преобразований?

2. Проквантовать теорию.

3. Пусть имеется экспериментальная установка, состоящая из источника и приемника фотонов, разделенных расстоянием $2L$. Посередине между источником и приемником установлена тонкая светонепроницаемая стенка. Источник испускает в направлении на приемник j неполяризованных фотонов в секунду. Найти скорость регистрации j_1 фотонов приемником, если вся система помещена в светонепроницаемый ящик, наполненный постоянным однородным магнитным полем $\mathbf{B}$.

[†]Во всех задачах необходимо найти размерности параметров и полей в четырехмерном пространстве-времени.

4. Пусть теперь стенку убрали, а источник заставили испускать линейно поляризованные вдоль оси Oy фотоны. Описать поляризацию фотонов на приемнике.

4. Канонически проквантовать массивное поле Дирака с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\alpha\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - i(1-\alpha)\bar{\psi}\overleftarrow{\hat{\partial}}\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

где α – действительный параметр. Зависит ли результат от α?

5. Рассмотрим теорию спинорного поля ψ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{m}{2}\left(\bar{\psi}^c\psi + \bar{\psi}\psi^c\right),$$

где ψ^c – зарядово сопряженный спинор.

1. Показать, что лагранжиан лоренц-инвариантен.
2. Найти общее решение уравнений поля.
3. Найти выражение для тензора энергии-импульса.
4. Проквантовать. Найти перестановочные функции и пропагатор в явном виде.

6. Рассмотрим электромагнитное поле в $(d+1)$ измерениях, взаимодействующее с внешним током и описываемое действием

$$S = \int d^{d+1}x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ej_\mu A_\mu\right). \tag{1}$$

1. Считая, что ток j_μ соответствует двум точечным покоящимся зарядам $j_0(\mathbf{x}) = -q_1\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_1}) - q_2\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_2})$, найти решение уравнений движения (закон Кулона).
2. Считая, что ток j_μ не зависит от времени, найти функционал энергии, соответствующий действию (1). Выразить его через электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.
3. Используя полученные в двух предыдущих задачах результаты, найти энергию взаимодействия двух точечных зарядов. Показать, что одноименные электрические заряды отталкиваются, а параллельные электрические токи притягиваются.
4. Решить предыдущие пункты в пространстве-времени произвольной размерности. Отдельно рассмотреть случаи $d=1$, $d=2$ и $d \geq 3$.

7. Рассмотрим скалярное поле в $(d+1)$ измерениях, взаимодействующее с внешним источником и описываемое действием

$$S = \int d^{d+1}x\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \rho\varphi\right) \tag{2}$$

1. Найти уравнение поля для действия (2). Решить их для точечного статического источника $\rho(\mathbf{x}) = -q\delta(\mathbf{x})$.
2. Найти функционал энергии для теории с действием (2). Вычислить энергию взаимодействия двух точечных статических зарядов q_1 и q_2, расположенных на расстоянии r друг от друга. Притягиваются или отталкиваются одноименные скалярные заряды? Найти выражение для силы.

8. Рассмотрим теорию действительного массивного квантового скалярного поля.

1. Построить нормированные состояния, являющиеся собственными состояниями оператора уничтожения:
$$a^-_{\mathbf{k}}|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}}|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle$$
Такие состояния называются когерентными. Найти разложение этих состояний по состояниям с фиксированным числом частиц. Показать, что набор состояний $|\alpha\rangle$ является (сверх)полным.

2. Оператор поля является операторно-значной обобщенной функцией. Ее можно сгладить пробной функцией, рассматривая функционалы вида
$$\varphi_f = \int d^4x f(x)\varphi(x)$$
Принимая во внимание этот факт, найти среднее значение поля, канонически сопряженного импульса и дисперсии этих величин ($\triangle\varphi = \sqrt{\langle\varphi^2 - \langle\varphi\rangle^2_\alpha\rangle_\alpha}$) по когерентным состояниям. Чему равно $\triangle\pi\triangle\phi$ в случае нульмерного пространства (квантовая механика)? Найти также среднее число частиц в когерентном состоянии.

3. Показать, что при эволюции когерентные состояния остаются когерентными.

4. Вычислить величину (a – число)
$$\langle n|\delta(\varphi_f - a)|n\rangle$$
Какой смысл имеет эта величина?

5. Можно ли построить собственные состояния операторов рождения?

9. Рассмотрим теорию действительного безмассового скалярного поля в $(d+1)$-мерном пространстве-времени. При этом будем рассматривать два случая $d = 1$ и $d = 3$. Предположим, что имеются две параллельные непроницаемые для поля пластины, расположенные на расстоянии a друг от друга (при $d = 1$ – это две точки).

1. Проквантовать теорию.

2. Найти изменение плотности энергии вакуума, связанное с присутствием пластин. *Указание 1:* Выражение для плотности энергии вакуума содержит расходящиеся суммы (интегралы). Поэтому необходимо регуляризовать соответствующие выражения, вводя, например, регуляризующую функцию $f(\alpha,\omega)$: $\omega \to \omega f(\alpha,\omega)$ (ω – частота), такую, что при фиксированном α $f(\alpha,\omega\to\infty)\to 0$, а при $\alpha = 0$ $f(0,\omega) = 1$. *Указание 2:* Для суммирования рядов удобно использовать формулы Эйлера-Маклорена или Абеля-Плана.

3. Найти силу взаимодействия пластин, отнесенную к единице площади.